

CUPRINS

Capitolul 1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MULȚIMI DE NUMERE	3
1.1. Mulțimi.....	3
1.2. Mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}	8
1.3. Mulțimea \mathbb{R} . Ordonarea numerelor reale.....	13
1.4. Modulul unui număr real.....	19
1.5. Aproximări prin lipsă sau prin adaos.....	22
1.6. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real.....	24
1.7. Intervale de numere reale.....	28
1.8. Inegalități uzuale.....	31
1.9. Propoziții. Operații logice cu propoziții. Formule de calcul propozițional.....	37
1.10. Predicate.....	40
1.11. Condiții necesare. Condiții suficiente. Teoreme.....	44
1.12. Metoda reducerii la absurd. Inducția matematică.....	48
1.13. Probleme de numărare.....	53
1.14. Teste de evaluare.....	55
1.15. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	56
Capitolul 2. ȘIRURI DE NUMERE REALE	61
2.1. Moduri de definire a unui șir.....	61
2.2. Șiruri mărginite.....	64
2.3. Șiruri monotone.....	68
2.4. Progresii aritmetice.....	72
2.5. Progresii geometrice.....	76
2.6. Șiruri recurente.....	82
2.7. Teste de evaluare.....	87
2.8. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	88
Capitolul 3. FUNCȚII.....	91
3.1. Produs cartezian. Reper cartezian.....	91
3.2. Graficul, imaginea, preimaginea și restricții ale unei funcții.....	93
3.3. Funcții mărginite. Funcții pare. Funcții impare.....	97
3.4. Simetria graficului unei funcții față de o dreaptă sau față de un punct din plan.....	100
3.5. Funcții periodice. Funcții monotone.....	102
3.6. Compunerea funcțiilor. Inversa unei funcții.....	106
3.7. Exemple particulare de funcții.....	108
3.8. Teste de evaluare.....	111
3.9. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	112
Capitolul 4. FUNCȚIA DE GRADUL I	115
4.1. Reprezentare grafică. Restricții.....	115
4.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$	120
4.3. Monotonia și semnul funcției de gradul I.....	123
4.4. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($< 0, \geq 0, > 0$) pe \mathbb{R}	125
4.5. Pozițiile relative a două drepte în plan. Sisteme de ecuații liniare.....	128
4.6. Sisteme de inecuații de gradul I.....	133
4.7. Teste de evaluare.....	134

Capitolul 5. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA.....	135
5.1. Ecuații de gradul al doilea. Formulele lui Viète.....	135
5.2. Natura și semnul rădăcinilor ecuației $ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$	140
5.3. Funcția de gradul al doilea. Minim, maxim, axă de simetrie.....	144
5.4. Reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea.....	147
5.5. Teste de evaluare.....	151
Capitolul 6. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A PROPRIETĂȚILOR ALGEBRICE ALE FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA	152
6.1. Monotonia și semnul funcției de gradul al doilea.....	152
6.2. Inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($> 0, \leq 0, < 0$), $a \neq 0$	156
6.3. Imagini și preimagini ale unor intervale pentru funcția de gradul al doilea	158
6.4. Poziția unei drepte față de o parabolă.....	160
6.5. Rezolvarea în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a sistemelor de ecuații de forma $x + y = S$; $xy = P$ sau de forma $ax^2 + bx + c = y$, $a'x^2 + b'x + c' = y$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$	163
6.6. Sisteme simetrice și sisteme omogene de gradul al doilea	166
6.7. Teste de evaluare.....	168
6.8. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	169
SOLUȚII	172

ALGEBRĂ

Capitolul 1 ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MUȘIMI DE NUMERE

1.1. Mușimi

Mușimea este o colecție de obiecte distincte. Obiectele mușimii se numesc elemente. Mușimile se notează cu literele mari ale alfabetului. O mușime poate fi dată prin enumerarea elementelor sale sau specificând anumite proprietăți pe care le au doar aceste elemente. Dacă a aparține A , notăm $a \in A$. În caz contrar $a \notin A$.

Definiții. 1. incluziunea: $A \subset B$ dacă pentru orice element $a \in A$ avem $a \in B$;

2. egalitatea: $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Operații cu mușimi

1. reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;

2. intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;

3. diferența: $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$;

4. complementara: dacă $A \subset E$, $C_E A = E - A$;

5. produs cartezian: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Definiții. 3. Mușimea părților unei mușimi nevide A este mușimea:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

4. Dacă A este o mușime finită, numărul elementelor lui A se numește *cardinalul* mușimii A (notat cu $\text{card } A$).

Teorema 1. Dacă $\text{card } A = n \in \mathbb{N}$, atunci $\text{card } \mathcal{P}(A) = 2^n$.

Teorema 2. Dacă $\text{card } A = m$, $\text{card } B = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $\text{card } (A \times B) = mn$.

Teorema 3. Relația de incluziune are proprietățile:

a) reflexivă: $A \subset A$;

b) antisimetrică: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) tranzitivă: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Teorema 4. Relația de egalitate are proprietățile:

a) reflexivitate: $A = A$;

b) simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$;

c) tranzitivă: $A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

Probleme rezolvate

1. Fie A, B, C mulțimi finite. Demonstrați că:

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \\ - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Soluție. $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}((A \cup B) \cup C) = \text{card}(A \cup B) + \text{card } C - \text{card}((A \cup B) \cap C) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B) + \text{card } C - \text{card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$

2. Fie A o mulțime cu 13 elemente. Demonstrați că numărul submulțimilor lui A cu 5 elemente este egal cu numărul submulțimilor lui A cu 8 elemente.

Soluție. A alege o submulțime B a lui A cu 5 elemente este echivalent cu a alege complementara lui B , adică mulțimea $D = C_A B = A - B$. Se ține seama că două submulțimi distincte au complementele distincte.

3. Mulțimea părților unei mulțimi date A este mulțimea $\mathcal{P}(A) = \{M \mid M \subset A\}$.

Observații. a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;

b) $\text{card } A = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{card } \mathcal{P}(A) = 2^n$.

Demonstrați că pentru orice mulțimi A, B avem $(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Când avem egalitate?

Soluție. Fie $M \in X = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Atunci $M \in \mathcal{P}(A)$ sau $M \in \mathcal{P}(B)$ și deci $M \subset A$ sau $M \subset B$. Rezultă că $M \subset A \cup B$, deci $M \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Egalitatea are loc când $A \subset B$ sau $B \subset A$. Într-adevăr, fie $A \subset B$. Avem $M \in \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(B)$ și deci $M \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Dacă $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$, există $a \in A - B$ și $b \in B - A$. Fie $M = \{a, b\}$. Atunci $M \subset (A \cup B)$, $M \in \mathcal{P}(A \cup B)$ și $M \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

4. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Determinați toate submulțimile lui A cu proprietatea că produsul tuturor elementelor fiecăreia este:

a) cel mult egal cu 10;

b) mai mare decât 20200.

Soluție. Produsul elementelor lui A este $8! = 40320$; a) Submulțimile sunt $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$; b) Orice submulțime care nu conține cel puțin unul din numerele 2, 3, ..., 8 are produsul cel mult egal cu $40320 : 2 = 20160 < 20200$. Submulțimile cerute sunt A și $A - \{1\}$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 4n\}$. Împărțiți mulțimea A în două submulțimi disjuncte B și C , astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi este aceeași.

Soluție. Pentru orice numere $k, k + 1, k + 2, k + 3, k \geq 1$, avem $k + (k + 3) = (k + 1) + (k + 2)$. Luăm deci mulțimile $B = \{4k - 3, 4k - 1 \mid k = \overline{1, n}\}$, $C = \{4k - 2, 4k \mid k = \overline{1, n}\}$.

6. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| + |b| < 10\}$.

Soluție. Avem $|a| + |b| = k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Fie ecuația $|a| + |b| = k$. Pentru $k = 0$ avem soluția $(0, 0)$, iar pentru $k = 9$ avem soluțiile $(\pm 9, 0), (0, \pm 9)$. Pentru $1 \leq k \leq 8$ avem în fiecare caz câte $4k$ soluții și deci $\text{card } A = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 181$.

Probleme propuse

1. Operațiile cu mulțimi au următoarele proprietăți:

a) comutativitatea: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

b) asociativitate: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

c) independență: $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;
 $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.

d) distributivitatea reuniunii (intersecției) față de intersecție (reuniune):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

e) reuniunea (intersecția) are proprietatea de absorbție față de intersecție (reuniune):

$$A \cap (A \cup B) = A;$$

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

f) pentru orice mulțime $B \subset A$ avem $A \cup B = A$; $A \cap B = B$.

g) Legile lui Morgan: pentru orice $A \subset E$, $B \subset E$ avem $C \in (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;
 $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

h) Dacă $A \subset E$, avem $C_E(C_E A) = A$; $C_E E = \emptyset$, $C_E \emptyset = E$.

i) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție, reuniune, diferență:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C); (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C); (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C); (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C).$$

j) $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$.

2. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Determinați două mulțimi B și C cu proprietățile $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, suma elementelor lui B este egală cu suma elementelor lui C în cazurile:

a) $\text{card} B = 6$; $\text{card} C = 14$;

b) $\text{card} B = 7$, $\text{card} C = 13$.

3. Determinați mulțimile A formate din trei numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A$, $x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

4. Determinați mulțimile A formate din 4 numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A$, $x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

5. Fie mulțimea $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Demonstrați că există mulțimile $B_n, C_n, D_n \subset A_n$, disjuncte două câte două astfel încât $s(B_n) = s(C_n) = s(D_n)$, unde $s(M)$ este suma elementelor lui M .

6. Fie $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Determinați cel mai mic element al mulțimii A_n astfel încât $S(A_n) = 36$.

7. Determinați cel mai mic număr de numere care trebuie scoase din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ astfel încât mulțimea rămasă să poată fi împărțită în două submulțimi disjuncte B și C în care produsele elementelor lor să fie numere egale.

8. Dați exemplu de trei mulțimi A, B și C cu proprietățile $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$, card $B = 3, p(B) = p(C)$, unde $p(M)$ înseamnă produsul elementelor lui M .

9. Rezolvați problema 8 în cazul $A = \{1, 2, 3, \dots, 35\}$.

10. Așezați pe un cerc toate numerele de la 1 la 16 astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie număr prim.

11. Determinați mulțimile A, B, C dacă:

$$a) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad b) A - (A \cap B) = \{6\}; \quad c) B - (B \cap A) = \{1, 3\}.$$

12. Determinați mulțimile A, B, C dacă:

$$\begin{array}{lll} a) A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; & & b) A \cap B = \emptyset; \\ c) C \subset B; & d) A - C = \{1, 3, 7\}; & e) B - C = \{5, 9\}. \end{array}$$

13. Rezolvați următoarele ecuații:

$$\begin{array}{l} a) \{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}; \\ b) (A - X) \cup (X - A) = \{1, 2, 3\}, \text{ unde } A = \{1, 2\}; \\ c) (A - X) \cup (X - A) = \{1, 4, 5\}, \text{ unde } A = \{1, 2, 3\}. \end{array}$$

14. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A = \{2a + 2\}, B = \{b, 2a + 1\}$. În ce condiții avem:

$$a) \text{card}(A \cup B) = 2; \quad b) \text{card}(A \cup B) = 3; \quad c) \text{card}(A \cup B) = 4.$$

15. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$, având proprietățile:

$$i) 2 \in A, 3 \in A; \quad ii) x \in A \Rightarrow 3x - 1 \in A; \quad iii) x + 1 \in A \Rightarrow x \in A$$

a) Determinați încă 5 elemente din A .

b) Determinați A .

16. Determinați card $(A \cap B)$ dacă:

$$\text{card}(A \cup B) = 201; \text{card}(A - B) = 100 \text{ și } \text{card}(B - A) = 96.$$

17. Determinați card A în cazurile:

$$a) A = \left\{ a \in \mathbb{N}^* \mid \frac{b}{a} = n^2, n \in \mathbb{N} \right\}, \text{ unde } b = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \dots (99^2 - 1);$$

$$b) A = \left\{ \overline{ab} \mid \overline{0, aa(b) + 0, bb(a)} = (0, (6))^2 \right\};$$

$$c) A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 13 \text{ divide pe } 2^n + 3^n\};$$

$$d) A = B \cap \mathbb{N}, \text{ unde } B = \left\{ \frac{3n+1}{4}, \frac{3n+2}{4}, \frac{n}{8}, \frac{3n+1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{4} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

18. Fie mulțimile $A_n = \left\{ \frac{n-1}{n} + \frac{kn}{n+1} \mid k \in \mathbb{N} \right\}, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că intersecția mulțimilor A_n este \emptyset .

19. Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că $\frac{n}{n+1} < x < \frac{2n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

20. Determinați numărul submulțimilor lui $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ care conțin elementele 9 și 10 și nu conțin 1 și 2.

21. Determinați submulțimile lui $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ care au suma elementelor cel puțin egală cu 16.

22. Determinați mulțimile $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x + 3y = 5\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5, |y| \leq 5, 3x + 4y = 7\}$.

23. Determinați $A \cap B$, dacă $A = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{501 - 3n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

24. Determinați mulțimile $A = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n^3 - 3n + 2}{2n + 1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{5n + 3}{2n^3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

25. Determinați card A , $A = \left\{x = \frac{n^2 + 7}{n^2 + n + 6} \mid n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 50\right\}$.

26. Determinați mulțimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu cel mult 5 elemente și cu proprietatea:

$$x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A \text{ și } (1 - x) \in A.$$

27. Fie B o submulțime a lui $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$, astfel încât produsul oricăror 3 elemente ale lui B nu este pătrat perfect. Determinați numărul maxim de elemente ale lui B .

28. Determinați $A - B$, $B - A$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2xy - 3x + 5y = 7\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3xy - 5x + 7y = 11\}$.

29. Determinați mulțimile finite $A \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $a + |a| \in A$, pentru orice $a \in A$.

30. Fie $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a + b = 2\}$, $B = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^3 + b^3 + 6ab = 8\}$. Determinați $B - A$.

31. Fie $a, b, E \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $E = a^2 + b^2 - 3a + 3b + \frac{17}{4} = 0$. Determinați perechea (m, n) , $m = \max|a + b|$, $n = \max|a^3 + b^3|$.

32. Determinați $x \cdot y$, dacă $x^2 + y^2 = 2$ și $(x - y)^4 - (x + y)^4 = 8$.

33. Determinați numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 2|a - 1| + 2|b - 2| + 2(a + 2b - 2c)$.

34. Determinați $a, b \in \mathbb{R}^*$, știind că $a^2 + b^2 \leq 1$ și $\frac{a+1}{b+1} + \frac{a+2}{b+2} + \frac{a+3}{b+3} + \frac{a+4}{b+4} = 4 \frac{a}{b}$.

1.2. Mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Rezolvarea unor ecuații de forma $a + x = b$, $a > b$, a dus la considerarea mulțimii $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Rezolvarea unor ecuații de forma $bx = a$, $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $(a, b) \neq 1$, a condus la considerarea mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Observații:

1) Dacă $a \in \mathbb{Z}$, avem $a, (0) = a$; $a, (9) = a + 1$.

2) Fie fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $(a, b) \neq 1$. Frația $\frac{a}{b}$ se transformă în:

- fracție zecimală finită, dacă $b = 2^m \cdot 5^n$, cu $m \in \mathbb{N}^*$ sau $n \in \mathbb{N}^*$ (adică $b = 2^m$ sau $b = 5^n$ sau $b = 2^m \cdot 5^n$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$);

- fracție zecimală periodică simplă, dacă numitorul nu admite ca divizori pe 2 și nici pe 5;

- fracție zecimală periodică mixtă în celelalte cazuri (numitorul are cel puțin doi divizori, dintre care un divizor este 2 sau 5, iar celălalt este un număr prim $p \notin \{2, 5\}$).

Definiția 1. O ecuație diofantică de gradul întâi cu două necunoscute este o ecuație de forma $ax + by = c$ (1), unde $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$. Perechea $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ care verifică ecuația (1) se numește *soluție particulară*. O ecuație (1) cu una sau mai multe soluții se numește *solvabilă*.

Teorema 1. Condiția necesară și suficientă ca ecuația $ax + by = c$ să admită soluții este ca $d \mid c$, unde $d = (a, b)$.

Teorema 2. Dacă ecuația diofantică $ax + by = c$ are soluția particulară (x_0, y_0) și $d = (a, b)$, soluția generală a ecuației este $x = x_0 + \frac{b}{d}t$, $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Definiția 2. Frațiile $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, se numesc *echivalente* dacă $ad = bc$. Mulțimea tuturor fracțiilor lor echivalente cu o fracție dată, se numește *număr rațional*. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Teorema 3. Adunarea și înmulțirea pe mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} au proprietățile:

1) comutativitate: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$;

2) asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$;

3) 0 este element neutru pentru adunare: $a + 0 = 0 + a = a$;

4) 1 este element neutru pentru înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

5) orice element $a \in \mathbb{Q}$ sau $a \in \mathbb{Z}$ are un opus (notat ca $-a$): $a + (-a) = 0$;

6) orice element $a \in \mathbb{Q}^*$ are un invers (notat cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$): $a \cdot a^{-1} = 1$;

7) înmulțirea este distributivă față de adunare: $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Observații:

a) În \mathbb{N} doar 0 are opus (pe 0).

b) În \mathbb{N} un singur element este inversabil (1). Inversul lui 1 este 1.

c) În \mathbb{Z} , elementele inversabile sunt 1 și -1 . Avem $(-1)^{-1} = 1$.

Definiția 3 Spunem că $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $a = b + c$; spunem că $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $a = b + c$.

8) **Trichotomie.** Pentru orice $a, b \in \mathbb{Q}$ avem $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$;

9) **Axioma lui Arhimede.** Pentru orice două numere naturale $a, b, a > 0$, există $n \in$

\mathbb{N} astfel încât $a \cdot n > b$ (se ia $n = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil + 1$)

• Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale;

• fracție zecimală periodică simplă ($a_0 \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_n$ cifre)

$$a_0, (a_1, a_2 \dots a_n) = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}}};$$

• fracție zecimală periodică mixtă ($a_0 \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ cifre)

$$a_0, a_1, a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_m) = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m - a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{999 \dots 9}_{m} \underbrace{00 \dots 0}_{n}}.$$

Teorema 4. Orice număr rațional se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite sau a unei fracții zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

Probleme rezolvate

1. Rezolvați în numere întregi ecuația $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Soluție. Avem ecuația $(x + y)(x^2 + y^2 - x - y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 - 2] = 0$. O soluție este $(a, -a)$, $a \in \mathbb{Z}$. Mai avem $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2$. Din $(x - 1)^2 \leq 1$, $(y - 1)^2 \leq 0$ rezultă $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 2]$ și mai avem soluțiile $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$.

2. Determinați tripletele de numere naturale (a, b, c) , știind că $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2$.

Soluție. Presupunem $a \geq b \geq c \geq 1$ și atunci $2 = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3$. Ob-

ținem $c \leq 3$. Dacă $c = 1$, rezultă $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1$, care nu are soluții în \mathbb{N}^* . Dacă $c =$

2, rezultă $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$. Cum $a \geq b$, rezultă $\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{4}{3}$ și atunci $c < 7$. Cum

$$1 + \frac{1}{a}$$

<