CUPRINS

ALGEBRĂ

Capitolul 1
ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimi

Mulțimea este o colecție de obiecte distincte. Obiectele mulțimii se numesc elemente. Mulțimile se notează cu literele mari ale alfabetului. O mulțime poate fi dată prin enumerarea elementelor sale sau specificând anumite proprietăți pe care le au doar aceste elemente. Dacă a aparține A, notăm $a \in A$. În caz contrar $a \notin A$.

Definiţii. 1. incluziunea: $A \subset B$ dacă pentru orice element $a \in A$ avem $a \in B$;

2. egalitatea: $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Operaţii cu mulţimi

1. reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;

2. intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;

3. diferența: $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$;

4. complementara: dacă $A \subset E$, $C_E A = E - A$;

5. produs cartezian: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Definiţii. 3. *Mulțimea părților unei mulțimi* nevide A este mulțimea:

$$\mathscr{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

4. Dacă A este o mulțime finită, numărul elementelor lui A se numește *cardinalul* mulțimii A (notat cu card A).

Teorema 1. Dacă card $A = n \in \mathrm{N}$, atunci card $\mathscr{P}(A) = 2^n$.

Teorema 2. Dacă card $A = m$, card $B = n$, $m, n \in \mathrm{N}$, atunci card $(A \times B) = mn$.

Teorema 3. Relația de incluziune are proprietățile:

a) reflexivă: $A \subset A$;

b) antisimetrică: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) tranzitivă: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Teorema 4. Relația de egalitate are proprietățile:

a) reflexivitate: $A = A$;

b) simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$;

c) tranzitivă: $A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

Probleme rezolvate

1. Fie A, B, C mulțimi finite. Demonstrați că:
$$\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} C - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).$$
Soluție. $\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card}((A \cup B) \cup C) = \operatorname{card}(A \cup B) + \operatorname{card} C - \operatorname{card}((A \cup B) \cap C) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card} C - \operatorname{card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} C - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C)$.

2. Fie A o mulțime cu 13 elemente. Demonstrați că numărul submulțimilor lui A cu 5 elemente este egal cu numărul submulțimilor lui A cu 8 elemente.
Soluție. A alege o submulțime B a lui A cu 5 elemente este echivalent cu a alege complementara lui B, adică mulțimea $D = C_A B = A - B$. Se ține seama că două submulțimi distincte au complementele distincte.

3. Mulțimea părților unei mulțimi date A este mulțimea $\mathscr{P}(A) = \{M \mid M \subset A\}$.
Observații. a) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$; b) $\operatorname{card} A = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \operatorname{card} \mathscr{P}(A) = 2^n$.

Demonstrați că pentru orice mulțimi A, B avem $(\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$. Când avem egalitate?
Soluție. Fie $M \in X = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. Atunci $M \in \mathscr{P}(A)$ sau $M \in \mathscr{P}(B)$ și deci $M \subset A$ sau $M \subset B$. Rezultă că $M \subset A \cup B$, deci $M \in \mathscr{P}(A \cup B)$. Egalitatea are loc când $A \subset B$ sau $B \subset A$. Într-adevăr, fie $A \subset B$. Avem $M \in \mathscr{P}(A \cup B) \Leftrightarrow M \in \mathscr{P}(B)$ și deci $M \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. Dacă $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$, există $a \in A - B$ și $b \in B - A$. Fie $M = \{a, b\}$. Atunci $M \subset (A \cup B)$, $M \in \mathscr{P}(A \cup B)$ și $M \notin \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

4. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Determinați toate submulțimile lui A cu proprietatea că produsul tuturor elementelor fiecăreia este:
a) cel mult egal cu 10; b) mai mare decât 20200.
Soluție. Produsul elementelor lui A este $8! = 40320$; a) Submulțimile sunt $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$; b) Orice submulțime care nu conține cel puțin unul din numerele $2, 3, \ldots, 8$ are produsul cel mult egal cu $40320 : 2 = 20160 < 20200$. Submulțimile cerute sunt A și $A - \{1\}$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$. Împărțiți mulțimea A în două submulțimi disjuncte B și C, astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi este aceeași.
Soluție. Pentru orice numere k, $k + 1$, $k + 2$, $k + 3$, $k \geq 1$, avem $k + (k + 3) = (k + 1) + (k + 2)$. Luăm deci mulțimile $B = \{4k - 3, 4k - 1 \mid k = \overline{1,n}\}$, $C = \{4k - 2, 4k \mid k = \overline{1,n}\}$.

6. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| + |b| < 10\}$.
Soluție. Avem $|a| + |b| = k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Fie ecuația $|a| + |b| = k$. Pentru $k = 0$ avem soluția $(0, 0)$, iar pentru $k = 9$ avem soluțiile $(\pm 9, 0)$, $(0, \pm 9)$. Pentru $1 \leq k \leq 8$ avem în fiecare caz câte $4k$ soluții și deci $\operatorname{card} A = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 181$.

Probleme propuse

1. Operațiile cu mulțimi au următoarele proprietăți:

a) comutativitatea: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

b) asociativitate: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$:

c) independență: $A \cap A = A$; $A \cap A = A$;

$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

d) distributivitatea reuniunii (intersecției) față de intersecție (reuniune):

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

e) reuniunea (intersecția) are proprietatea de absorbție față de intersecție (reuniune):

$A \cap (A \cup B) = A$;

$A \cup (A \cap B) = A$.

f) pentru orice mulțime $B \subset A$ avem $A \cup B = A$; $A \cap B = B$.

g) Legile lui Morgan: pentru orice $A \subset E$, $B \subset E$ avem $C \in (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

h) Dacă $A \subset E$, avem $C_E(C_E A) = A$; $C_E E = \varnothing$, $C_E \varnothing = E$.

i) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție, reuniune, diferență:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$; $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

j) card $(A \cup B)$ = card A + card B – card $(A \cap B)$.

2. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Determinați două mulțimi B și C cu proprietățile $B \cup C = A$, $B \cap C = \varnothing$, suma elementelor lui B este egală cu suma elementelor lui C în cazurile:

a) card $B = 6$; card $C = 14$; b) card $B = 7$, card $C = 13$.

3. Determinați mulțimile A formate din trei numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A$, $x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

4. Determinați mulțimile A formate din 4 numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A$, $x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

5. Fie mulțimea $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Demonstrați că există mulțimile B_n, C_n, $D_n \subset A_n$, disjuncte două câte două astfel încât $s(B_n) = s(C_n) = s(D_n)$, unde $s(M)$ este suma elementelor lui M.

6. Fie $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Determinați cel mai mic element al mulțimii A_n astfel încât $S(A_n) = 36$.

7. Determinați cel mai mic număr de numere care trebuie scoase din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ astfel încât mulțimea rămasă să poată fi împărțită în două submulțimi disjuncte B și C în care produsele elementelor lor să fie numere egale.

8. Dați exemplu de trei mulțimi A, B și C cu proprietățile $A = B \cup C$, $B \cap C = \varnothing$, card $B = 3$, $p(B) = p(C)$, unde $p(M)$ înseamnă produsul elementelor lui M.

9. Rezolvați problema **8** în cazul $A = \{1, 2, 3, \ldots, 35\}$.

10. Așezați pe un cerc toate numerele de la 1 la 16 astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie număr prim.

11. Determinați mulțimile A, B, C dacă:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A - (A \cap B) = \{6\}$; c) $B - (B \cap A) = \{1, 3\}$.

12. Determinați mulțimile A, B, C dacă:
a) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $A \cap B = \varnothing$;
c) $C \subset B$; d) $A - C = \{1, 3, 7\}$; e) $B - C = \{5, 9\}$.

13. Rezolvați următoarele ecuații:
a) $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$;
b) $(A - X) \cup (X - A) = \{1, 2, 3\}$, unde $A = \{1, 2\}$;
c) $(A - X) \cup (X - A) = \{1, 4, 5\}$, unde $A = \{1, 2, 3\}$.

14. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A = \{2a + 2\}$, $B = \{b, 2a + 1\}$. În ce condiții avem:
a) card $(A \cup B) = 2$; b) card $(A \cup B) = 3$; c) card $(A \cup B) = 4$.

15. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$, având proprietățile:
i) $2 \in A, 3 \in A$; ii) $x \in A \Rightarrow 3x - 1 \in A$; iii) $x + 1 \in A \Rightarrow x \in A$
a) Determinați încă 5 elemente din A.
b) Determinați A.

16. Determinați card $(A \cap B)$ dacă:
card $(A \cup B) = 201$; card $(A - B) = 100$ și card $(B - A) = 96$.

17. Determinați card A în cazurile:
a) $A = \left\{ a \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{b}{a} = n^2, n \in \mathbb{N} \right\}$, unde $b = (2^2 - 1)(3^2 - 1)\ldots(99^2 - 1)$;
b) $A = \left\{ \overline{ab} \,\middle|\, \overline{0,aa(b)} + \overline{0,bb(a)} = \left(0,(6)\right)^2 \right\}$;
c) $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 13 \text{ divide pe } 2^n + 3^n\}$;
d) $A = B \cap \mathbb{N}$, unde $B = \left\{ \frac{3n+1}{4}, \frac{3n+2}{4}, \frac{n}{8}, \frac{3n+1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

18. Fie mulțimile $A_n = \left\{ \frac{n-1}{n} + \frac{kn}{n+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că intersecția mulțimilor A_n este $\varnothing$.

19. Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că $\frac{n}{n+1} < x < \frac{2n+1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

20. Determinați numărul submulțimilor lui $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ care conțin elementele 9 și 10 și nu conțin 1 și 2.

21. Determinați submulțimile lui $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ care au suma elementelor cel puțin egală cu 16.

22. Determinați mulțimile $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x + 3y = 5\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x| \leq$ $\leq 5, |y| \leq 5, 3x + 4y = 7\}$.

23. Determinați $A \cap B$, dacă $A = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{501 - 3n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

24. Determinați mulțimile $A = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{n^3 - 3n + 2}{2n + 1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{5n + 3}{2n^3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

25. Determinați card A, $A = \left\{x = \dfrac{n^2 + 7}{n^2 + n + 6} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 50\right\}$.

26. Determinați mulțimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu cel mult 5 elemente și cu proprietatea:

$$x \in A \Rightarrow \frac{1}{x} \in A \text{ și } (1 - x) \in A.$$

27. Fie B o submulțime a lui $A = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$, astfel încât produsul oricăror 3 elemente ale lui B nu este pătrat perfect. Determinați numărul maxim de elemente ale lui B.

28. Determinați $A - B$, $B - A$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2xy - 3x + 5y = 7\}$, $B = \{(x, y) \in$ $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3xy - 5x + 7y = 11\}$.

29. Determinați mulțimile finite $A \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $a + |a| \in A$, pentru orice $a \in A$.

30. Fie $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a + b = 2\}$, $B = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^3 + b^3 + 6ab = 8\}$. Determinați $B - A$.

31. Fie $a, b, E \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $E = a^2 + b^2 - 3a + 3b + \dfrac{17}{4} = 0$. Determinați perechea (m, n), $m = \max|a + b|$, $n = \max|a^3 + b^3|$.

32. Determinați $x \cdot y$, dacă $x^2 + y^2 = 2$ și $(x - y)^4 - (x + y)^4 = 8$.

33. Determinați numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 2|a - 1| +$ $+ 2|b - 2| + 2(a + 2b - 2c)$.

34. Determinați $a, b \in \mathbb{R}^*$, știind că $a^2 + b^2 \leq 1$ și $\dfrac{a+1}{b+1} + \dfrac{a+2}{b+2} + \dfrac{a+3}{b+3} + \dfrac{a+4}{b+4} = 4\dfrac{a}{b}$.

1.2. Mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Rezolvarea unor ecuații de forma $a + x = b$, $a > b$, a dus la considerarea mulțimii $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Rezolvarea unor ecuații de forma $bx = a$, $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $(a, b) \neq 1$, a condus la considerarea mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

Observații:

1) Dacă $a \in \mathbb{Z}$, avem $a,(0) = a$; $a,(9) = a + 1$.

2) Fie fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $(a, b) \neq 1$. Fracția $\frac{a}{b}$ se transformă în:

• fracție zecimală finită, dacă $b = 2^m \cdot 5^n$, cu $m \in \mathbb{N}^*$ sau $n \in \mathbb{N}^*$ (adică $b = 2^m$ sau $b = 5^n$ sau $b = 2^m \cdot 5^n$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$);

• fracție zecimală periodică simplă, dacă numitorul nu admite ca divizori pe 2 și nici pe 5;

• fracție zecimală periodică mixtă în celelalte cazuri (numitorul are cel puțin doi divizori, dintre care un divizor este 2 sau 5, iar celălalt este un număr prim $p \notin \{2, 5\}$).

Definiția 1. O *ecuație diofantică* de gradul întâi cu două necunoscute este o ecuație de forma $ax + by = c$ (1), unde $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$. Perechea $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ care verifică ecuația (1) se numește *soluție particulară*. O ecuație (1) cu una sau mai multe soluții se numește *solvabilă*.

Teorema 1. Condiția necesară și suficientă ca ecuația $ax + by = c$ să admită soluții este ca $d \mid c$, unde $d = (a, b)$.

Teorema 2. Dacă ecuația diofantică $ax + by = c$ are soluția particulară (x_0, y_0) și $d = (a, b)$, soluția generală a ecuației este $x = x_0 + \frac{b}{d}t,\ y = y_0 - \frac{a}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Definiția 2. Fracțiile $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, se numesc *echivalente* dacă $ad = bc$. Mulțimea tuturor fracțiilor lor echivalente cu o fracție dată, se numește *număr rațional*. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Teorema 3. Adunarea și înmulțirea pe mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ au proprietățile:

1) comutativitate: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$;

2) asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$;

3) 0 este element neutru pentru adunare: $a + 0 = 0 + a = a$;

4) 1 este element neutru pentru înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

5) orice element $a \in \mathbb{Q}$ sau $a \in \mathbb{Z}$ are un opus (notat ca $-a$) : $a + (-a) = 0$;

6) orice element $a \in \mathbb{Q}^*$ are un invers (notat cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$) : $a \cdot a^{-1} = 1$;

7) înmulțirea este distributivă față de adunare: $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Observații:

a) În $\mathbb{N}$ doar 0 are opus (pe 0).

b) În $\mathbb{N}$ un singur element este inversabil (1). Inversul lui 1 este 1.

c) În $\mathbb{Z}$, elementele inversabile sunt 1 și – 1. Avem $(-1)^{-1} = 1$.

Definiţia 3 Spunem că $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $a = b + c$; spunem că $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $a = b + c$.

8) **Trichotomie.** Pentru orice $a, b \in \mathbb{Q}$ avem $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$;

9) **Axioma lui Arhimede.** Pentru orice două numere naturale a, b, $a > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \cdot n > b$ (se ia $n = \left[\frac{b}{a}\right] + 1$)

- Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale;
- fracție zecimală periodică simplă ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ cifre)

$$a_0,(a_1, a_2 \ldots a_n) = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{n\ cifre}};$$

- fracție zecimală periodică mixtă ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ cifre)

$$a_0, a_1, a_2 \ldots a_n (b_1 b_2 \ldots b_m) = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{999\ldots9}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{n}}.$$

Teorema 4. Orice număr rațional se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite sau a unei fracții zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

Probleme rezolvate

1. Rezolvați în numere întregi ecuația $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Soluție. Avem ecuația $(x + y)(x^2 + y^2 - x - y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 - 2] = 0$. O soluție este $(a, -a)$, $a \in \mathbb{Z}$. Mai avem $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2$. Din $(x - 1)^2 \leq 1$, $(y - 1)^2 \leq 0$ rezultă $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 2]$ și mai avem soluțiile (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2).

2. Determinați tripletele de numere naturale (a, b, c), știind că $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2$.

Soluție. Presupunem $a \geq b \geq c \geq 1$ și atunci $2 = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leq \left(1+\frac{1}{c}\right)^3$. Obținem $c \leq 3$. Dacă $c = 1$, rezultă $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1$, care nu are soluții în $\mathbb{N}^*$. Dacă $c = 2$, rezultă $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$. Cum $a \geq b$, rezultă $\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{4}{3}$ și atunci $c < 7$. Cum

$1+\frac{1}{a}$ <